Άσκηση 1: Δίνεται $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής. Θέτουμε $\varphi(x)=\int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)dt$.
Να δείξουμε ότι η φ παραγωγίσιμη και να βρούμε την φ'.

Απόδειξη:

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής

$$y=\frac{x}{t} \Rightarrow t=\frac{x}{y} \Rightarrow dt=-\frac{x}{y^2}dy$$

για $t=1 \sim y=x$

για $t=x \sim y=1$

Έτσι, $\varphi(x)=\int_x^1 f(y)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)dy = x\int_1^x \frac{f(y)}{y^2}dy$

Άρα, η φ είναι γινόμενο δύο παραγωγίσιμων, συνεπώς παραγωγίσιμη με $\varphi'(x)=\int_1^x \frac{f(y)}{y^2}dy+\frac{f(x)}{x}$.

Άσκηση 2: Να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-t}dt$.

Απόδειξη:

Έχουμε $\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-t}dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x te^{-t}dt$

$$\int_0^x t\cdot e^{-t}dt=\int_0^x t\cdot(-e^{-t})'dt=[-t\cdot e^{-t}]_0^x-\int_0^x 1\cdot(-e^{-t})dt=[-t\cdot e^{-t}]_0^x+$$

$$+\int_0^x e^{-t}dt=[-t\cdot e^{-t}-e^{-t}]_0^x=-x\cdot e^{-x}-e^{-x}+1=1-e^{-x}-x\cdot e^{-x}$$

Υπολογισμός με De L'Hospital

Έτσι, $\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-t}dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\cdot e^{-t}dt=\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}-\boxed{x\cdot e^{-x}}\right)=1$

Άσκηση 3: Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$.

Απόδειξη:

Έχουμε $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2\cdot e^{-t}dt$

$$\int_0^x t^2 e^{-t}\,dt = \int_0^x t^2 (-e^{-t})'\,dt = \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x 2t(-e^{-t})\,dt =$$ (2)

$$= \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x 2t(e^{-t})'\,dt = \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^x - \left[2t\, e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x 2\, e^{-t}\,dt =$$

$$= \left[-t^2 e^{-t} - 2t\, e^{-t} - 2e^{-t}\right]_0^x = -x^2 e^{-x} - 2x\, e^{-x} - 2e^{-x} + 2$$

Έτσι, $$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2 e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\Big(\overset{\text{2 φορές De L'Hospital}}{\boxed{-x^2 e^{-x}}} - \overset{\text{1 φορά De L'Hospital}}{\boxed{2x\, e^{-x}}} - 2e^{-x} + 2\Big) = 2.$$

▶ Έστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(t)\geq 0$ ώστε η f ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,x]$. Συχνά, ενδιαφερόμαστε για το αν συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ ακόμα και αν δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ακριβή τιμή του.

Πρόταση: (Κριτήριο Σύγκρισης)

Έστω $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $0\leq f(t)\leq g(t)$ $\forall t\in[a,+\infty)$ ώστε f,g ολοκληρώσιμες σε κάθε $[a,x]$. (π.χ. αν f,g συνεχείς)

(i) Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ συγκλίνει (συμβολισμός $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt < +\infty$), τότε το $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ συγκλίνει $\left(\int_a^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty\right)$.

(ii) Αν $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty$.

Παραδείγματα: Να εξετάσετε αν συγκλίνουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

α) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$, β) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx$.

α) $0 \leq \dfrac{1}{x^6+1} \leq \dfrac{1}{x^6}$ $\forall x\geq 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^6}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta} \frac{1}{x^6}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{x^{-5}}{-5}\right]_1^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)(\beta^{-5}-1) = \frac{1}{5} < \infty$$

Συνεπώς, από το κριτήριο σύγκρισης:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} < +\infty.$$

β) Έχουμε $\frac{1}{x} \leq \frac{\log x}{x}$ $\forall x \geq 5$.

$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_5^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} (\log b - \log 5) = +\infty$.

Επομένως, $\int_5^{+\infty} \frac{\log x}{x} dx = +\infty$.

<u>Πρόταση:</u> (Οριακό κριτήριο λόγου)

Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ $\forall x \geq a$. Αν $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

α) Αν $0 < \ell < +\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx < +\infty$.

β) Αν $\ell = 0$, τότε αν υπάρχει και συγκλίνει το $\int_a^{+\infty} g(x) dx < +\infty \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty$.

γ) Αν $\ell = +\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx < +\infty$

<u>Παράδειγμα:</u>

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} dx$ συγκλίνει;

Θέτουμε $f(x) = \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}}$ και $g(x) = \frac{1}{x^3}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x^3 + \sqrt{x}}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{x^3}{x^3 + \sqrt{x}} = \frac{1}{1 + x^{-5/2}} \xrightarrow{x \to +\infty} 1$$

Εφόσον το γενικευμένο ολοκλήρωμα: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ συγκλίνει, άρα συγκλίνει και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} dx$.

<u>Πρόταση:</u> (Κριτήριο Γενικευμένων Ολοκληρωμάτων και Σειρών)

Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα με $f(t) \geq 0$ $\forall t \geq 1$.

Θέτουμε: $a_k = f(k)$.

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ συγκλίνει.

$a_{k+1} = f(k+1) \cdot 1 \leq \int_a^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \cdot 1 = a_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$ τότε $\forall x \geq 1$

$$\int_1^x f(t)dt \leq \int_1^{[x]+1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{[x]} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{[x]} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ συγκλίνει.

($\Leftarrow$) Αν $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} f(t)dt$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Τότε, $\forall n$ $S_n = a_1 + (a_2 + \ldots + a_n) \leq a_1 + \left(\int_1^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(t)dt \right)$

$= a_1 + \int_1^n f(t)dt \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(t)dt$. Επομένως, η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί για ποιό $p>0$ συγκλίνει η σειρά: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$

Θέτουμε $f(t) = \frac{1}{t(\log t)^p}$ $t \in [2, +\infty)$. Έχουμε $f(t) \geq 0$ $\forall t \geq 2$.

και φθίνουσα. Συνεπώς, από το κριτήριο ολοκληρωμάτων και σειρών, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\log t)^p} dt$$

Θέτουμε $y = \log t \Rightarrow t = e^y \Rightarrow dt = e^y dy$

$$\int \frac{1}{t(\log t)^p} dt = \int \frac{1}{e^y . y^p} e^y dy = \int y^{-p} dy =$$

$$= \begin{cases} \text{για } p=1 : \log y = \log(\log t) \\ \text{για } p\neq 1, p>0 : \dfrac{y^{-p+1}}{-p+1} = \dfrac{(\log t)^{1-p}}{1-p} \end{cases}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\log t)^p} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t(\log t)^p} dt =$$

$$= \begin{cases} \text{για } p=1 : \lim_{x\to+\infty} \log(\log x) - \log(\log 2) = +\infty \text{ (αποκλίνει)} \\ \text{για } p\neq 1, p>0 : \lim_{x\to+\infty} \left[\dfrac{(\log x)^{1-p}}{1-p} - \dfrac{(\log 2)^{1-p}}{1-p} \right] = \begin{cases} 0<p<1 & (=+\infty) \\ p>1 & (<+\infty) \end{cases} \end{cases}$$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ TAYLOR – ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR

$p(x) = a x^n$

$p'(x) = a n x^{n-1}$

$p''(x) = a n(n-1) x^{n-2}$

$p'''(x) = a n(n-1)(n-2) x^{n-3}$

$\vdots$

$$p^{(k)}(x) = a \cdot \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

$p^{(n)}(x) = a \cdot n!$

Έστω $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$p(0) = a_0$

$p'(0) = a_1$

$p''(0) = 2a_2$

$p'''(0) = 6a_3$

$\vdots$

Γενικά, $p^{(k)}(0) = k!\, a_k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Αποδεικνύεται με επαγωγή

$$\Rightarrow a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}$$

Αν γνωρίζω τα $p^{(k)}(0)$ $k, 0, 1, \dots, n$,

ξέρω το πολυώνυμο $p(x)$.

Αν $p(x) = b_n (x-x_0)^n + b_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots + b_2 (x-x_0)^2 + b_1 (x-x_0) + b_0$,

Τότε $b_k = \dfrac{p^{(k)}(x_0)}{k!}$ $k = 0, 1, \dots, n$.

<u>Συνέπεια</u>: Αν γνωρίζω τα $p^{(k)}(x_0)$ $k = 0, 1, \dots, n$.

Τότε γνωρίζω το πολυώνυμο $p(x)$